第３講　数列

9　Nを2以上の自然数とし，$a_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$を次の性質(i)，(ii)をみたす数列とする.

(i)　$a_1=2^N-3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$に対して，

a_nが偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$,

a_nが奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$.

このときどのような自然数Mに対しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つことを示せ.

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10　n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ.　《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11　次の問に答えよ.

(1)　n を正の整数，$a=2^n$ とする．3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ.

(2)　m を正の偶数とする．3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ.　《10 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　数列

9　N を 2 以上の自然数とし，$a_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)をみたす数列とする．

(i)　$a_1=2^N-3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，

a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$．

このときどのような自然数 M に対しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つことを示せ．

《13 京大・理系》

【答】　略

【解説】　$N=2$ のとき

$a_1=2^2-3=1$ より $a_2=\dfrac{a_1-1}{2}=0$ よって $n\geqq 2$ に対して $a_n=0$．ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 1$

$2^{2+1}-2-5=1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つ．

$N\geqq 3$ のとき

$a_1=2^N-3$ より $a_2=\dfrac{a_1-1}{2}=2^{N-1}-2$，$a_3=\dfrac{a_2}{2}=2^{N-2}-1$

ここで正の整数 m に対し，2^m-1 は奇数だから，3 以上の整数 k に対して $a_k=2^m-1$ の形のとき，$a_{k+1}=\dfrac{a_k-1}{2}=2^{m-1}-1$ なので，$m-1\geqq 1$ つまり $m\geqq 2$ のとき，$2^{m-1}-1$ は奇数となるので，$a_l=2^{N+1-l}-1(l=3,\ \cdots,\ N)$ となる．

このとき，$a_N=2^1-1=1$ より，$a_{N+1}=0$．以降帰納的に $a_n=0(n\geqq N+1)$．ゆえに

$$\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq(2^N-3)+(2^{N-1}-2)+(2^{N-2}-1)+\cdots+(2^1-1)$$

$$=\frac{2(2^N-1)}{2-1}-3-2-1\cdot(N-2)$$

$$=2^{N+1}-N-5$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10 n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ.　《11 京大・理系》

【答】 略

【解説】 $n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0$$

より与式は成立する.

$n=k(\geqq 2)$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$$

の成立を仮定すると,

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})$$

が成立するが,

$$\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

$$=a_{k+1}\left\{\frac{1}{2^k}-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}$$

$$>a_{k+1}\left\{\frac{1}{2^k}-1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\qquad\left(\because\quad a_j>\frac{1}{2}(j=1,\ 2,\ \cdots)\right)$$

$$=a_{k+1}\left\{\frac{1}{2^k}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=0$$

よって，$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$ となり

$n=k+1$ のときにも与式は成立するので，数学的帰納法により，2 以上のすべての自然数 n に対して与式が成立することが示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 次の問に答えよ．

(1) n を正の整数，$a=2^n$ とする．3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ．

(2) m を正の偶数とする．3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ．《10 京大・理系》

【答】(1) 略　(2) 略

【解説】(1) $n=1$ のとき，$a=2^1=2$ より $3^a-1=3^2-1=8=2^3$ であるが，これは 2^3 で割り切れるが，2^4 では割り切れない．

ここで $n=k(\geqq 1)$ のとき，$3^{2^k}-1=2^{k+2}\times M$($M$ は正の奇数) と表せるとすると，

$$\begin{aligned}3^{2^{k+1}}-1&=3^{2\cdot 2^k}-1\\&=(3^{2^k})^2-1\\&=(2^{k+2}\times M+1)^2-1\\&=(2^{k+2})^2M^2+2\cdot 2^{k+2}\times M\\&=2^{2k+4}M^2+2^{k+3}\times M\\&=2^{k+3}(2^{k+1}M^2+M)\end{aligned}$$

となるが，$k\geqq 1$ より 2^{k+1} は偶数，つまり $2^{k+1}M^2+M$ は奇数なので，$2^{k+3}(2^{k+1}M^2+M)$ は 2^{k+3} で割り切れるが，2^{k+4} で割り切れない．

以上より，数学的帰納法により題意は示された．

(2) m は正の偶数より $m=2^n\times M$ (n は正の整数，M は正の奇数) と表せる．このとき，

$$\begin{aligned}3^m-1&=3^{2^n\times M}-1\\&=(3^{2^n})^M-1\\&=(3^{2^n}-1)\{(3^{2^n})^{M-1}+\cdots+3^{2^n}+1\}\end{aligned}$$

ここで(1)により $3^{2^n}-1$ は 2^{n+2} で割り切れて 2^{n+3} で割り切れなく，$(3^{2^n})^{M-1}+\cdots+3^{2^n}+1$ は奇数の M 項の和なので奇数になるから，3^m-1 は 2^{n+2} で割り切れて 2^{n+3} で割り切れないといえる．

このとき 3^m-1 は 2^m で割り切れるので $m\leqq n+2$ となる．

$$m\leqq n+2 \iff 2^n\times M\leqq n+2$$

であるが，$M\geqq 3$ とすると，$2^n>n$ より $2^n\times M\geqq 3\cdot 2^n>n+2$ なので不適．よって $M=1$.

このとき $n+2\geqq 2^n\times 1\geqq 2n$ より $n\leqq 2$

$n=1$ のとき $m=2^1\times 1=2$，$n=2$ のとき $m=2^2\times 1=4$

よって $m=2$ または $m=4$ に限る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。